Lineare Algebra II
Lösungsvorschläge zum Tutoriumsblatt 7

Moritz Fleischmann

Zur Vorlesung von Prof. Dr. Fabien Morel, Dr. Andrei Lavrenov, Katharina Novikov und Oliver Hendrichs im Sommersemester 25

Disclaimer: Das sind keine offiziellen Lösungen, sondern nur eine getexte Version der Lösungen zu ausgewählten Aufgaben (Dank geht hierbei an Andrei Lavrenov für seine Lösungsskizzen), die ich in meinem Tutorium bespreche. Fehler, Fragen oder Anmerkungen gerne an m.fleischmann@mnet-online.de. Verteilung der Lösungen ist erlaubt und erwünscht.

Wie üblich, wen das Vorgeplänkel nicht interessiert, der kann die Lösungen in den grau hinterlegten Boxen finden. Es gilt grundsätzlich, dass $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$.

Aufgabe 1

Sei $(A, +)$ eine endliche abelsche Gruppe. Zeige:

1. Seien $x_1, \ldots, x_k \in A$ Erzeuger von A und $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{N}$ mit $\mathsf{ggT}(c_1, \ldots, c_k) = 1$. Zeige, dass es Erzeuger $y_1, \ldots, y_k \in A$ gibt, wobei
$$y_1 = c_1 x_1 + \ldots + c_k x_k$$
2. Zeige, dass A eine endliche direkte Summe zyklischer Untergruppen ist.
3. Zeige, dass es $r, n, m_j \in \mathbb{N}$ und Primzahlen p_j für $j \in [n]$ gibt, sodass
$$A \simeq \mathbb{Z}^r \oplus \bigoplus_{j=1}^{n} \mathbb{Z}/(p_j)^{m_j}\mathbb{Z}$$
4. Zeige, dass es $r, t, d_j \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $d_1 | \ldots | d_t$ und
$$A \simeq \mathbb{Z}^r \oplus \bigoplus_{j=1}^{t} \mathbb{Z}/d_j\mathbb{Z}$$
5. Bestimme d_j für
$$A \simeq \mathbb{Z}/48\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$$

Lösung:

Die Lösung hier orientiert sich an dem Beweis dieser Aussagen aus *J.S Milne - Group Theory (2021)*.

1. Wir führen eine Induktion über die Summe der c_j durch. Es sei $s = c_1 + \ldots + c_k$.
   - *Induktionsanfang:* $s = 1$
     Falls $s = 1$ ist, dann kann nur einer der Koeffizienten c_j gleich 1 sein und alle anderen müssen 0 sein. Um $y_1 = c_j x_j = x_j$ zu erfüllen, reicht es also aus, wenn wir die x_j neu ordnen.
   - *Induktionsbehauptung:* Wir nehmen an, dass die Aussage für alle $r = 1, \ldots, s$ gelte.
   - *Induktionsschritt:* $s \to s + 1$
     Da $s > 1$ ist, müssen mindestens zwei der c_j ungleich Null sein. Denn angenommen $c_k = s$ und $c_j = 0$ für alle $j \neq k$, dann wäre der größte gemeinsame Teiler gleich s - denn s ist ein Teiler von 0 für alle $s \in \mathbb{N}$.
     Da wir mindestens zwei Koeffizienten haben, die ungleich Null sind, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $c_1 \geq c_2 > 0$ gilt. Es gelten dann die

folgenden drei Aussagen:

(a)

$$\langle x_1, x_1 + x_2, x_3, \ldots, x_k \rangle = A$$

Denn ziehen wir das erste Element dieser Menge vom zweiten ab, erhalten wir x_2, also enthält die betrachtete Menge ein Erzeugersystem von A und ist damit selbst ein Erzeugersystem.

(b)

$$\mathsf{ggT}(c_1 - c_2, c_2, c_3, \ldots, c_k) = 1$$

Angenommen es gäbe $k > 1$, das alle Elemente aus dieser Menge teilt. Dann gilt $k|c_2$ und $k|(c_1 - c_2)$. Damit folgt aber direkt $k|c_1$. Also wäre k ein Teiler von $c_1, \ldots, c_k$ - wir setzen aber voraus, dass diese Elemente allesamt teilerfremd sind.

(c)

$$(c_1 - c_2) + c_2 + \ldots + c_k < s + 1$$

da $c_2 > 0$ gilt.

Da die Summe von $c_1 - c_2, c_2, \ldots, c_k$ kleiner als $s + 1$ ist, können wir die Induktionsbehauptung auf das Erzeugendensystem $x_1, x_1 + x_2, x_3, \ldots, x_k$ mit den Koeffizienten $c_1 - c_2, c_2, \ldots, c_k$ anwenden. Das heißt es gibt ein Erzeugendensystem $y_1, \ldots, y_k$ mit

$$y_1 = (c_1 - c_2)x_1 + c_2(x_1 + x_2) + c_3x_3 + \ldots + c_kx_k = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_kx_k$$

Das ist aber genau das, was wir zeigen wollen und mit vollständiger Induktion gilt die Aussage für beliebige s, also alle möglichen Koeffizienten, die unsere Bedingungen erfüllen.

2. Wir führen hier eine Induktion über die minimale Anzahl erzeugender Elemente k durch.

- *Induktionsanfang:* $k = 1$
  Wenn A durch ein einzelnes Element x_k erzeugt werden kann, dann ist A bereits eine zyklische Gruppe und wir sind fertig.
- *Induktionsbehauptung:* Wir nehmen an, dass die Aussage für $m = 1, \ldots, k$ gelte.
- *Induktionsschritt:* $k - 1 \to k$
  A kann durch k Elemente erzeugt werden. Unter allen Erzeugersystemen mit k Elementen wählen wir nun ein Erzeugersystem, das ein Element minimaler Ordnung enthält.[a]
  Sei das Erzeugersystem $S = \{x_1, \ldots, x_k\}$ mit x_1 dem Element minimaler Ordnung.
  Wenn gilt, dass $A \simeq \langle x_1 \rangle \oplus \langle x_2, \ldots, x_k \rangle$ gilt, dann können wir die Induktionsbehauptung anwenden um

$$\langle x_2, \ldots, x_k \rangle = \bigoplus_{j=2}^{k} \langle x_j \rangle$$

zu schreiben, denn die Gruppe $\langle x_2, \ldots, x_k \rangle$ wird offenbar von $k - 1$ Elementen erzeugt. Angenommen wir könnten A nicht so zerlegen, es gelte also $A \not\simeq \langle x_1 \rangle \oplus \langle x_2, \ldots, x_k \rangle$. Da die Elemente $x_1, \ldots, x_k$ die Gruppe A erzeugt, gilt sicherlich $A \simeq \langle x_1 \rangle + \langle x_2, \ldots, x_k \rangle$, das Problem liegt also in der Direktheit der Summe. Das heißt es gibt eine nichttriviale Linearkombination der Null. Es seien also $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$ mit

$$0 = a_1x_1 + \ldots + a_kx_k$$

Da $\langle x_2, \dots x_k \rangle \simeq \langle x_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle x_k \rangle$ gilt, gibt es keine triviale Linearkombination der Null in dieser Gruppe, das heißt es muss eine Beteiligung von $\langle x_1 \rangle$ geben, es gilt also $a_1 \neq 0$ (und damit existiert ein $j > 1$ mit $a_j \neq 0$). Da $\langle x_j \rangle = \langle -x_j \rangle$ für alle j gilt, können wir alle x_j mit negativem Koeffizienten a_j durch $-x_j$ ersetzen und so oBdA annehmen, dass $\forall j : a_j \geq 0$ gilt. Wir können außerdem annehmen, dass $a_1 < \mathsf{Ord}(x_1)$ gilt (Division mit Rest).

Es sei nun $d := \mathsf{ggT}(a_1, \dots, a_k) > 0$. Das heißt es gilt $a_j = dc_j$ für alle j und damit

$$\mathsf{ggT}(c_1, \dots, c_k) = 1$$

Laut der ersten Teilaufgabe existieren damit $y_1, \dots, y_k$ die A erzeugen, sodass

$$y_1 = c_1 x_1 + \dots c_k x_k$$

also gilt

$$dy_1 = a_1 x_1 + \dots + a_k x_k = 0$$

laut Annahme. Dann gilt $\mathsf{Ord}(y_1) = d < \mathsf{Ord}(x_1)$, da sicherlich $d \leq a_1$ gilt. Wir hatten allerdings angenommen, dass es keine Menge von Erzeugern gibt, die ein Element mit einer kleineren Ordnung als x_1 enthält, also ist das ein Widerspruch. Das heißt unsere Annahme war falsch und es gilt

$$A \simeq \langle x_1 \rangle \oplus \langle x_2, \dots, x_k \rangle$$

und mit der Induktionsbehauptung gilt die zu zeigende Aussage.

---

[a] Präziser ausgedrückt: Seien $D_j, j \in I$ alle möglichen Erzeugendensysteme mit k Elementen. Dann wählen wir eine Menge D_l, sodass $x \in D_l$ existiert, für das gilt: $\forall j \in I : \forall y \in D_j : \mathsf{Ord}(x) \leq \mathsf{Ord}(y)$.

3. Wir verwenden hier die zweite Teilaufgabe. Wir wissen also bereits, dass A die direkte Summe zyklischer Gruppen ist. Alle zyklischen Gruppen sind entweder isomorph zu $\mathbb{Z}$ oder isomorph zu $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, also gibt es $r \in \mathbb{N}$ und $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ mit

$$A \simeq \mathbb{Z}^r \oplus \bigoplus_{j=1}^{k} \mathbb{Z}/n_j\mathbb{Z}$$

Dabei ist r bereits das r, das wir am Ende haben wollen - um das zu sehen überlegen wir uns folgendes: Sei p eine Primzahl, die keine der Zahlen n_j teilt. Betrachte

$$A/p\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}^r/p\mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{j=1}^{k} (\mathbb{Z}/n_j\mathbb{Z})/p\mathbb{Z}$$

Da für ein $j \in [k]$ gilt, dass $\mathsf{ggT}(n_j, p) = 1$ existieren laut dem Lemma von Bézout Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ mit

$$xn_j + yp = 1$$

also gilt $1 + xn_j = -yp$, also insbesondere $1 + xn_j \equiv 0 \mod p$. Damit gilt für jedes Element $b \in \mathbb{Z}/n_j\mathbb{Z}$, dass $b \equiv 0 \mod p$ und damit

$$(\mathbb{Z}/n_j\mathbb{Z})/p\mathbb{Z} \simeq 0$$

Das heißt insgesamt:

$$A/p\mathbb{Z} \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r$$

und da $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ein Körper ist, ist damit $A/p\mathbb{Z}$ der Vektorraum in r Dimensionen über $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Angenommen unsere obige Zerlegung wäre nicht eindeutig, es gäbe also $r', m_1, \ldots, m_l \in \mathbb{N}$ mit $r' \neq r$ und

$$A \simeq \mathbb{Z}^{r'} \oplus \bigoplus_{j=1}^{l} \mathbb{Z}/m_l\mathbb{Z}$$

dann können wir dieselbe Prozedur wiederholen (mit einem p das weder n_j noch m_j teilt) und erhielte, dass $A/p\mathbb{Z}$ ein r'-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ wäre. Das ist allerdings ein Widerspruch, da die Dimension eines Vektorraums eindeutig ist.

Wir müssen nun nur noch die Zerlegung der n_j anpassen. Wir verwenden dabei folgende Aussage:

$$\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \Leftrightarrow \mathsf{ggT}(n, m) = 1$$

Sei $n_j \in \mathbb{N}$ mit der (eindeutigen) Primfaktorzerlegung

$$n = p_{j,1}^{m_{j,1}} \cdot \ldots \cdot p_{j,l_j}^{m_{j,l_j}}$$

dann gilt

$$\mathbb{Z}/n_j\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/p_{j,1}^{m_{j,1}}\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/p_{j,l_j}^{m_{j,l_j}}\mathbb{Z}$$

und damit insgesamt

$$A \simeq \mathbb{Z}^r \oplus \bigoplus_{j=1}^{k} \mathbb{Z}/p_{j,1}^{m_{j,1}}\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/p_{j,l_j}^{m_{j,l_j}}\mathbb{Z}$$

wenn wir diese Primzahlpotenzen umbenennen erhalten wir das gewünschte Ergebnis.

4. Diese Darstellung ist lediglich eine Umordnung der Darstellung in der dritten Teilaufgabe. Das ganze in schöner Notation aufzuschreiben ist ziemlich mühsam und wenig erhellend. Deswegen wird die Lösung hier nur grob skizziert:

Wir ordnen und indizieren unsere Primzahlpotenzen neu. Es sei $p_1 > p_2 > \ldots > p_n$ und für jede Primzahl p_j gelte für die Exponenten: $m_{j,1} \geq m_{j,2} \geq \ldots \geq m_{j,l_j}$. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass $l_j = t$ für alle j gilt.[a] Dann gilt

$$A \simeq \mathbb{Z}^r \oplus \bigoplus_{j=1}^{n} \bigoplus_{k=1}^{t} \mathbb{Z}/p_j^{m_{j,k}}\mathbb{Z}$$

Primzahlpotenzen zu verschiedenen Primzahlen können wir hier zusammenfassen, das heißt eine Umordnung ist:

$$A \simeq \mathbb{Z}^r \oplus \bigoplus_{k=1}^{t} \underbrace{\bigoplus_{j=1}^{n} \mathbb{Z}/p_j^{m_{j,k}}\mathbb{Z}}_{=:d_{t-k}}$$

Da $m_{j,k} \geq m_{j,k+1}$ für alle j gilt, gilt $p_j^{m_{j,k+1}} | p_j^{m_{j,k}}$ und da das für alle Primzahlen eines Elementarteilers gilt, folgt damit auch $d_{t-k-1} | d_{t-k}$, das heißt $d_1 | d_2 | \ldots | d_t$, wie gewünscht.

[a] In der Praxis könnte man beispielsweise $t = \max\{l_j \mid j \in [n]\}$ wählen und dann für jede Primzahl p_j zu-

sätzliche Exponenten $m_{j,l_j+1} = 0, \dots, m_{j,t} = 0$ addieren. Das Ergebnis ist immer noch isomorph, da wir immer nur mit $\{1\}$ summieren. Da $\mathtt{ggT}(m,1) = 1$, können wir auch weiterhin die Restklassenringe zusammenfassen, wie geplant.

5. Wir folgen hier dem Beweis aus der vierten Teilaufgabe. Wir führen zuerst eine Primfaktorzerlegung durch. Es gilt:

$$48 = 2^4 \cdot 3$$
$$36 = 2^2 \cdot 3^3$$

Wir ordnen diese nun nach Basis und Exponent, unsere Primzahlpotenzen wären also

$$2^4, 2^2, 3^3, 3$$

und wir wählen für den letzten Elementarteiler zu jeder Primzahl die Primzahlpotenz mit dem höchsten Exponenten. Für den zweitletzten Elementarteiler wählen wir zu jeder Primzahl die Primzahlpotenz mit dem zweithöchsten Exponenten, etc. Daraus folgt:

$$d_1 = 2^2 \cdot 3 = 12$$
$$d_2 = 2^4 \cdot 3^3 = 144$$

Aufgabe 2

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\dim(V) = n$ und $f : V \to V$ ein Homomorphismus. Sei f unipotent, das heißt $f - \mathbb{1}_V$ ist nilpotent. Zeige, dass $\chi_f = (X-1)^n$

Lösung:

Wir wollen uns die Beziehungen zwischen Minimalpolynom und charakteristischem Polynom zunutze machen. Zuerst bestimmen wir das Minimalpolynom.
Laut Annahme ist $f - \mathbb{1}_V$ nilpotent, das heißt es existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$(f - \mathbb{1}_V)^k = 0$$

Es gilt aber $(f - \mathbb{1}_V)^k = P(f)$ für $P = (X-1)^k$, das heißt $P(f) = 0$ und damit ist μ_f ein Teiler von $P(f)$. Daraus folgt direkt, dass

$$\mu_f = (X-1)^m$$

für ein $m \leq k$. Wir wissen weiter, dass jede Nullstelle des charakteristischen Polynoms auch eine Nullstelle des Minimalpolynoms ist und umgekehrt. Das heißt das charakteristische Polynom von f hat exakt die gleichen Nullstellen wie μ_f, also gilt

$$\chi_f = (X-1)^t$$

für ein $t \geq m$ (denn $\mu_f | \chi_f$.). Das charakteristische Polynom eines Endomorphismus hat als Grad immer die Dimension des Vektorraums. In diesem Fall also

$$t = \deg(\chi_f) = \dim(V) = n$$

Das heißt $\chi_f = (X-1)^n$, was zu zeigen galt.

Aufgabe 3
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $f : V \to V$ ein Homomorphismus.

1. Zeige, dass $\chi_{f^*} = \chi_f$.
2. Sei $\chi_f = \mu_f$. Zeige, dass (V, f) ein zyklischer Raum ist, d.h. zeige, dass ein Polynom $P \in \mathbb{K}[X]$ existiert, sodass
$$V \simeq \mathbb{K}[X]/P$$
wobei f dem Endomorphismus entspricht, der von der Multiplikation mit X induziert wird.
3. Sei $V \simeq \mathbb{K}[X]/P$ ein zyklischer Raum. Zeige, dass (V^*, f^*) ebenfalls ein zyklischer Raum ist und
$$(V, f) \simeq (V^*, f^*)$$
gilt.
4. Zeige, dass (V, f) isomorph zu (V^*, f^*) ist. (Also auch für nichtzyklische Räume V.)

Lösung:
Über duale Abbildungen hatten wir letztes Semester einiges gelernt, siehe dazu auch meine Lösungen zu den Tutorienblättern acht und neun der linearen Algebra I.

1. Es sei B eine Basis von V und $M_B(f)$ sei die darstellende Matrix von f in dieser Basis. Weiter sei B^* die zu B duale Basis von V^*. Es sei $M_{B^*}(f^*)$ die darstellende Matrix von f^* in der Basis B^*.
Laut Lineare Algebra I, Tutoriumsblatt 9, Aufgabe 4 gilt dann, dass
$$M_{B^*}(f^*) = M_B(f)^T$$
und diese Darstellung können wir nun in der Berechnung des charakteristischen Polynoms verwenden. Dazu nehmen wir die Definition des charakteristischen Polynoms:
$$\begin{aligned}\chi_{f^*}(X) &= \det(M_{B^*}(f^*) - \mathbb{1}_{V^*}X)\\ &= \det\left((M_{B^*}(f^*) - \mathbb{1}_{V^*}X)^T\right)\\ &= \det(M_{B^*}^T(f^*) - \mathbb{1}_{V^*}^T X)\\ &= \det(M_B(f) - \mathbb{1}_V X) = \chi_f(X)\end{aligned}$$
wobei wir auch verwendet haben, dass
$$\mathbb{1}_{V^*}^T = E_n = \mathbb{1}_V$$
gilt. Die Einheitsmatrix sieht in allen Basen gleich aus. Die beiden Polynome sind also gleich.

2. Folgende Aussage kann man auch ohne die Klassifikation von $\mathbb{K}[X]$-Moduln zeigen, das ist aber (meiner Meinung nach) umständlicher und unverständlicher.

Wir nehmen an, dass $\chi_f(X) = \mu_f(X)$ gelte. Wir verwenden die Klassifikation von $\mathbb{K}[X]$-Moduln, es gilt also

$$V \simeq \mathbb{K}[X]/P_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}[X]/P_k$$

für geeignete paarweise teilerfremde Polynome P_j. Wir wissen aus der Klassifikation ebenfalls, dass $P_k = \mu_f$ und $P_1 \cdot \ldots \cdot P_k = \chi_f$ gilt. Da aber $\chi_f = \mu_f = P_k$ gilt, gilt $P_1, \ldots, P_{k-1} = 1$, diese Polynome sind für die Isomorphie also uninteressant. Es gilt

$$V \simeq \mathbb{K}[X]/P_k$$

und mit Tutoriumsblatt 3, Aufgabe 1 folgt auch direkt die weitere Bedingung, dass f dem Endomorphismus entspricht, der von der Multiplikation mit X induziert wird.

3. Wir wissen mit der ersten Teilaufgabe, dass $\chi_f = \chi_{f^*}$ gilt. Laut der zweiten Aufgabe des sechsten Übungsblatts gilt ebenso $\mu_f = \mu_{f^*}$. Wir nehmen bereits an, dass

$$V \simeq \mathbb{K}[X]/P$$

mit Tutoriumsblatt 3, Aufgabe 2 folgt, dass $P = \chi_f = \mu_f$, dann gilt aber auch

$$\chi_{f^*} = \chi_f = \mu_f = \mu_{f^*}$$

also gilt mit der zweiten Teilaufgabe, dass (V^*, f^*) ein zyklischer Vektorraum ist, da das charakteristische Polynom und Minimalpolynom übereinstimmen. Es gilt also

$$V \simeq \mathbb{K}[X]/\mu_f, \qquad V^* \simeq \mathbb{K}[X]/\mu_{f^*}$$

aber da $\mu_f = \mu_{f^*}$ gilt, folgt damit sofort $V \simeq V^*$, was wir zeigen wollten.

4. Sei (V^*, f^*) ein endlichdimensionaler Vektorraum, dann gilt mit der Klassifikation von $\mathbb{K}[X]$-Moduln, dass

$$(V, f) \simeq \mathbb{K}[X]/P_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}[X]/P_k$$

für geeignete Polynome P_j. Wir beachten, dass aus

$$V \simeq V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$$

folgt, dass

$$V^* \simeq V_1^* \oplus \ldots \oplus V_n^*$$

Wenden wir das auf obige Aussage an, erhalten wir, dass

$$(V^*, f^*) \simeq (\mathbb{K}[X]/P_1)^* \oplus \ldots \oplus (\mathbb{K}[X]/P_k)^*$$

wir hatten aber für zyklische Räume gezeigt, dass $\mathbb{K}[X]/P$ isomorph zu seinem Dualraum ist. Insbesondere gilt das also für alle direkten Summanden. Da nun also alle direkten Summanden von (V^*, f^*) isomorph zu den direkten Summanden von (V, f) sind, gilt auch insgesamt

$$(V^*, f^*) \simeq (V, f)$$

Aufgabe 4

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Sei λ

ein Eigenwert von f.
Betrachte die Kette

$$\ker(f - \mathbb{1}_V\lambda) \subseteq \ker(f - \mathbb{1}_V\lambda)^2 \subseteq \dots$$

Sei m die minimale Zahl, sodass

$$\ker(f - \mathbb{1}_V\lambda)^m = \ker(f - \mathbb{1}_V\lambda)^{m+1}$$

Zeige, dass

$$\mu_f(X) = (X - \lambda)^m P(X)$$

für ein $P \in \mathbb{K}[X]$ koprim zu $(X - \lambda)$ ist.

Lösung:

Sei $U := \ker(f - \mathbb{1}_V\lambda)^m$. Wir erinnern uns, dass $\forall k \in \mathbb{N} : \ker(f - \mathbb{1}_V\lambda)^k$ ein f-invarianter Teilraum ist, es gilt also insbesondere $f(U) \subseteq U$. Sei $g := f|_U : U \to U$.
Es gilt $\mu_f(g) = \mu_f(f|_U) = 0$, da g nur eine Einschränkung von f ist. Hieraus folgt, dass $\mu_g | \mu_f$.
Sei $a \in U$, dann gilt

$$(g - \mathbb{1}_U\lambda)^m(a) = (f - \mathbb{1}_V\lambda)^m(a) = 0$$

und da g nur auf U definiert ist, folgt damit $(g - \mathbb{1}_U\lambda)^m = 0$, das heißt das Minimalpolynom ist ein Teiler von $(X - \lambda)^m$. Es gibt also $k \leq m$ mit

$$\mu_g = (X - \lambda)^k$$

Andererseits gilt für ein $a \in U$ auch

$$(f - \mathbb{1}_V\lambda)^k(a) = (f|_U - \mathbb{1}_U\lambda)^k(a) = 0$$

das heißt $\ker(f - \mathbb{1}_V\lambda)^k = \ker(f - \mathbb{1}_V\lambda)^m = U$ und da m minimal gewählt war, folgt daraus $k = m$.
Da μ_g ein Teiler von μ_f ist, folgt damit, dass es ein Polynom $P \in \mathbb{K}[X]$ gibt, sodass

$$\mu_f(X) = (X - \lambda)^m P(X)$$

gilt.
Wir wollen nun noch zeigen, dass P koprim zu $(X - \lambda)$ ist. Wir wollen also den maximalen Exponenten für $(X - \lambda)$ bestimmen. Es sei nun also Q ein Polynom das koprim zu $(X - \lambda)$ ist und es sei $t \geq m$, sodass

$$\mu_f(X) = (X - \lambda)^t Q(X)$$

Da $(X - \lambda)^t$ und Q koprim sind, folgt mit Tutoriumsblatt 3, Aufgabe 4:

$$V \simeq \ker(f - \mathbb{1}_V\lambda)^t \oplus \ker(Q(f))$$

Seien nun $f_1 := f|_{\ker(f - \mathbb{1}_V\lambda)^t}$ und $f_2 := f|_{\ker(Q(f))}$ und sei jeweils μ_j das Minimalpolynom zu f_j.
Dann gilt mit Tutoriumsblatt 4, Aufgabe 2.3, dass

$$\mu_f = \mathsf{kgV}(\mu_1, \mu_2)$$

Da μ_2 auch ein Teiler von $Q(f)$ ist, folgt, dass μ_2 koprim zu $(X - \lambda)$ ist. Wir hatten bereits weiter oben bestimmt, dass $\mu_1 = (X - \lambda)^m$ gilt, da $\ker(f - \mathbb{1}_V \lambda)^t = \ker(f - \mathbb{1}_V \lambda)^m$ gelten muss. Zusammen folgt daraus, dass

$$\mu_f = (X - \lambda)^m Q'$$

gilt, wobei Q' teilerfremd zu $(X - \lambda)$ ist. Da die Darstellung eindeutig ist, folgt $P = Q'$ und die zu zeigende Aussage ist gezeigt.